

Surjectivité de l'exponentielle matricielle

- Réduction des endomorphismes, Maus, p 224
- Maths pour Ingénieurs, Rombaldi, p 769

MAN

224

Def 1: Soit $N \in M_n(K)$ nilpotente d'indice p . Le logarithme de la matrice $I_n + N$ est la matrice :

$$\ln(I_n + N) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k \quad (\text{c'est une somme finie})$$

Prop 2: Soit $N \in M_n(K)$ nilpotente. Alors les matrices $\ln(I_n + N)$ et $e^N - I_n$ sont nilpotentes et :

$$\exp(\ln(I_n + N)) = I_n + N \quad \text{et} \quad \ln(e^N) = N$$

Lemme 3: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathbb{C}[x]$ tel que $A = e^{P(A)}$.

MAN

227

Preuve: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$. On a donc la décomposition de Dunford de A : $A = D + N$. On rappelle que D et N sont des polynômes en A . Comme A est inversible, sa partie diagonalisable D l'est aussi (elle a les mêmes valeurs propres que A , donc non nulles).

On a la décomposition :

$$A = D(I_n + D^{-1}N)$$

RON

769

C'est à dire que

$A \in GL_n(\mathbb{C})$

seul.

Comme D est inversible, ses valeurs propres sont toutes non nulles. Comme D est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $D = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$. On l'exponentielle est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ donc il existe des complexes $\mu_1, \dots, \mu_n$ tel que $\lambda_h = e^{\mu_h} \quad \forall h \in \{1, \dots, n\}$.

Soit Q un polynôme d'interpolation de Lagrange $Q \in \mathbb{C}[x]$ tel que $\mu_h = Q(\lambda_h) \quad \forall h \in \{1, \dots, n\}$ (il ne faut en fait définir Q que sur les valeurs propres distinctes).

On a donc :

$$\begin{aligned} D &= P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \\ &= P \cdot \text{diag}(e^{f_1}, \dots, e^{f_n}) P^{-1} \\ &= P \cdot \text{diag}(e^{Q(\lambda_1)}, \dots, e^{Q(\lambda_n)}) P^{-1} \\ &= e^M \quad \text{où } M = P \cdot \text{diag}(f_1, \dots, f_n) P^{-1} \end{aligned}$$

On :

$$\begin{aligned} M &= P \cdot \text{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) P^{-1} \\ &= Q(P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}) = Q(D) \end{aligned}$$

Donc : $D = e^{Q(D)}$

MAN

227

Comme D est un polynôme en A , on dispose alors de $P_1 \in \mathbb{C}[x]$ tel que $D = e^{P_1(A)}$.

La matrice $D^{-1}N$ est nilpotente car N est nilpotente et D et N commutent (donc N commute avec D qui est un polynôme en D).

Ainsi d'après la prop 1,

$$I_n + D^{-1}N = \exp(\ln(I_n + D^{-1}N))$$

Or $\ln(I_n + D^{-1}N)$ est par construction un polynôme en $D^{-1}N$.

Comme D et N sont des polynômes en A (et D^{-1} polynôme en D), on obtient que $D^{-1}N$ est un polynôme en A .

Ainsi il existe $P_2 \in \mathbb{C}[x]$ tel que

$$\ln(I_n + D^{-1}N) = P_2(A)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} A &= D(I_n + D^{-1}N) \\ &= e^{P_1(A)} \cdot e^{P_2(A)} = e^{(P_1 + P_2)(A)} \quad (\text{car } P_1(A) \text{ et } P_2(A) \text{ commutent}) \end{aligned}$$

On a le résultat annoncé avec le polynôme $P_1 + P_2$.

Prop 4: L'application $\exp$ est surjective de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Preuve: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. D'après le lemme précédent, il existe $P \in \mathbb{C}[x]$ tel que $A = e^{P(1)}$. Ainsi toute matrice inversible est atteinte par l'application $\exp$.

Lemme 5: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une matrice $R \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = R^p$.

Preuve: Or il existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $A = e^B$. On pose $R = e^{\frac{1}{p}B}$. Alors $R^p = e^B = A$.

Prop 6: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre:

1) $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = e^B$

2) $\exists R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = R^2$

Autrement dit:

$$\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{M^2; M \in GL_n(\mathbb{R})\}$$

Preuve: $\Rightarrow$: On pose $R = e^{\frac{1}{2}B}$ et alors $R^2 = R R = e^{\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B} = e^B = A$.

$\Leftarrow$: On regarde R comme une matrice dans $GL_n(\mathbb{C})$. Ainsi d'après le lemme 5, il existe $P \in \mathbb{C}[x]$ tel que $R = e^{P(R)}$.

On écrit R est à coefficients réels.

$$A = R^2 = R \bar{R} = e^{P(R)} e^{\overline{P(R)}} = e^{P(R) + \overline{P(R)}}$$

La matrice réelle $B = P(R) + \overline{P(R)}$ satisfait alors la condition.

Remarques

R011 1) Grâce à ce théorème, on peut montrer que
770 $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

En effet, soit $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P_1, P_2 \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $e^{P_1} = A_1$ et $e^{P_2} = A_2$.

On pose: $\gamma: [0; 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$
 $t \mapsto e^{(1-t)P_1 + tP_2}$

Alors γ est un chemin continu dans $GL_n(\mathbb{C})$ qui relie A_1 et A_2 .

MAN 2) Dim de la prop 2:

224 On a $\ln(I_n + N) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k = N \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^{k-1}$

$$= N \cdot B$$

p = indice de
nilpotence
de N

On a commuté avec N , donc $\ln(I_n + N)$ est
nilpotente d'indice $\leq p$.

On fait de même pour $e^N - I_n$.

On regarde les polynômes:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} x^k \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

$$\text{Ainsi } P(N) = e^N - I_n \quad \text{et} \quad Q(N) = \ln(I_n + N)$$

D'après les DL en 0 on a:

$$e^x = 1 + P(x) + O(x^p)$$

$$\ln(1+x) = Q(x) + O(x^p)$$

On compose alors ces DL entre elles:

$$\begin{aligned} 1+x &= e^{\ln(1+x)} = \exp(Q(x) + O(x^p)) \\ &= 1 + P(Q(x)) + O(x^p) \end{aligned}$$

Et;

$$\alpha = \ln(e^x) = \ln(1 + p(x) + O(x^p))$$

$$= Q(p(x)) + O(x^p)$$

On a donc :

$$p \circ Q(x) - x = -O(x^p) \text{ donc } x^p \mid (p \circ Q)(x) - x$$

$$\text{Et : } Q \circ p(x) - x = O(x^p) \text{ donc } x^p \mid (Q \circ p)(x) - x$$

En prenant $x = N$, on obtient que

$$(p \circ Q)(N) = N \text{ et } (Q \circ p)(N) = N$$

Ainsi :

$$\exp(\ln(I_m + N)) = \exp(Q(N))$$

$$= (1 + p) \circ Q(N)$$

$$= I_m + (p \circ Q)(N) = I_m + N$$

$$\text{Et : } \ln(e^N) = \ln(I_m + p(N)) = Q(p(N)) = N.$$